Álgebra Liner e Geometria Analítica

Matrizes

Grupo de Disciplina

Aula 04

Maputo, Março de 2024

Conteúdos da Aula

- Operações elementares
- Matriz escalonada
- Matriz inversa
- Método de Jordan
- Método da adjunta clássica

Operações Elementares

São três as operações operações elementares:

- Permutação de duas linhas (ou colunas) $l_i \leftrightarrow l_j$
Exemplo: $l_2 \leftrightarrow l_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

- Mulplicação de todos elementos de uma linha (ou coluna) por um número real não nulo $l_i \leftarrow rl_i$
Exemplo: $l_2 \leftarrow -3l_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

- Substituição da linha i pela i adicionado a linha j multiplicada por um escalar não nulo $l_i \leftarrow l_i + rl_j$
Exemplo: $l_3 \leftarrow l_3 + 3l_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

Matrizes equivalentes

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. A matriz A é dita ser equivalente (por linhas) à matriz B se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de operações elementares sobre as linhas da matriz A.

Exemplo: as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

São equivalentes por linhas, já que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 - 4l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 + 3l_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} l_2 \leftarrow -l_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} l_3 \leftarrow l_3 - 4l_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma Escalonada

Matriz escalonada

Definição: uma matriz A é linha reduzida a forma escalonada, ou seja, uma matriz na forma escada é uma matriz triangular superior que satisfaz as seguintes condições:

1) se há linhas nulas, são as últimas.

2) o primeiro elemento não nulo de cada linha (com excepção da primeira) situa-se a direita do elemento não nulo da linha anterior

3)os elementos que se situam por baixo do primeiro elemntro não nulo de cada linha com excepção da última são todos nulos.

Forma Escalonada

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; e \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz A_1 está na forma escalonada pois satisfaz todas as condições anteriores e enquanto a matriz A_2 não está na forma escalonada, pois a segunda condição não é satisfeita.

Forma Escalonada

Exemplo: utilizando operações elementares transforme a matriz em matriz equivalente escalonada:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_1 \leftrightarrow l_3 \\ l_2 \leftrightarrow l_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_3 \leftarrow l_3 + l_1 \\ l_4 \leftarrow l_4 - 2l_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & -4 & 9 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_3 \leftarrow l_3 - 3l_2 \\ l_4 \leftarrow l_4 + 4l_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

Pivó

Definição: chama-se **pivó** aos elementos não nulos de cada linha de uma matriz escalonada.

Exemplo1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ os pivós são 1, 2, e -3

Exemplo2: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ os pivós são

Algorítmo de Gauss

1. Se a matriz tiver todos os elementos nulos pare, a matriz já está na forma escalonada.
2. Caso contrário, encontre a primeira coluna vinda da esquerda que contém um elemento não nulo k. mova a linha que contém esse elemento para o topo da matriz.
3. Multiplicar por $\frac{1}{k}$ a linha no topo. Obtém-se assim um pivó (esse passo pode ser batido e pode ser feito no fim).
4. Anula-se cada elemento abaixo do pivó adicionando as linhas abaixo múltiplos adequados da linha no topo.
5. Repita os passos de 1 à 4 para a matriz formada pelas restantes linhas

Algorítmo de Gauss

Exemplo: encontre a forma escalonada, aplicando o algoritmo de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz na forma escalonada reduzida: dizemos que uma matriz está na forma escalonada reduzida, se o único elemento não nulo de cada coluna é igual a unidade 1

Algorítmo de Gauss-Jordan:

1ª Fase: algoritmo de Gauss até produzir uma matriz na forma escalonada

2ª Fase: Aplicar o algorítmo de baixo para cima por forma a anular todos os elementos situados acima dos pivós.

Característica da Matriz

Definição: a característica de uma matriz é o número de pivós ou de linhas não nulas de qualquer de qualquer matriz na forma escalonada obtida de ***A*** por aplicação sucessiva de um número finite de operações elementares sobre as linhas da matriz ***A***.

Exemplo: determine a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efectuando operações elementares sobre as linhas de A, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftarrow l_2 + l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Característica da Matriz

$$l_2 \leftarrow \frac{1}{2}l_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{bmatrix} l_3 \leftarrow l_3 + 4l_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \end{bmatrix} l_3 \leftarrow \frac{1}{6}l_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/2 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = 3$$

Definição de Matriz inversa

Definição: Seja A uma matriz de ordem n. Disemos que A possui inversa ou que A é inertível se existe uma e única matriz B de ordem n tal que

$$AB = BA = I$$

Se A possui inversa, a matriz B é única e é denotada por A^{-1} ou seja
Se A é invertível, tem-se $AA^{-1} = \mathrm{I} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A}$

Matriz Inversa

Exemplo: dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ determine a inversa da matriz A se possível.

Resolução seja $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a inversa de A, tal que $AA^{-1} = I$ então:

-

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3c = 1 \\ 3a + 2c = 0 \end{cases} e \begin{cases} 2b + 3d = 0 \\ 3a + 2c = 1 \end{cases}$$

$a = -4$, $b = 3$, $c = 3$ e $d = -2$, logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

Matriz inversa: método de Jordan

Dada uma matriz $A_{n\times n}$. Para calcular a inversa ampliamos a matriz A da seguinte forma: $[A \vdots I]$, tal que, I é a matriz identidade de ordem n. Efectuamos operações elementares sobre sobre a matriz ampliada de modo a obtermos
$[I \vdots A^{-1}]$.

Método de Jordan

Exemplo: encontre a matiz inversa da matiz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ pelo método de Jordan.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] l_1 \leftarrow \frac{1}{3} l_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} l_2 \leftarrow l_2 - 9l_1 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] l_3 \leftarrow 3l_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_1 - \frac{2}{3} l_3 \\ l_2 \leftarrow l_2 - l_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Então a matriz inversa é:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Método da Adjunta

Definição (Cofactor). Chama-se cofactor do elemento a_{ij} da matriz $\mathrm{A} = \llbracket a_{ij} \rrbracket_n$, o número real

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\mathrm{A_{ij}})$$

onde A_{ij} é uma matriz obtida de A eliminando-se a linha i e coluna j.

Definição (Matriz Adjunta). Seja A uma matriz $n \times n$. Definimos a matriz adjunta de A, denotada por $\mathrm{adj}(A)$, como a trasposta da matriz formada pelos cofatores de A, ou seja,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}$$

em que $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{\mathrm{ij}})$ é o cofator do elemento a_{ij}, para $i, j = 1,2, \dots, n$.

Teorema 2.2 (Cálculo da Matriz Inversa pelo Método da Matriz Adjunta). Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se $\det(A) \neq 0$. Neste caso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A).$$

Método da matriz adjunta

Para determinar a inversa de uma matriz A de ordem n utilizando o método matriz adjunta, procede-se da seguinte for:

- encontrar o determinante da matriz A

- determinar a matriz dos cofactores

- encontrar a transporta da matriz dos cofactores

- encontrar a matriz A^{-1} da seguinte forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

Método da matriz adjunta

Exemplo: encontre a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução

1) Encontre primeiro o determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

2) Em seguida determina-se a matriz dos cofactores, em que cada cofator é calculado por:
$c_{i\,j} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}\right|$ e a matriz dos cofatores é $A^c = [c_{i\,j}]$

Método da Matriz Adjunta

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}D_{11} = D_{11}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 5 = -11$$

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2}D_{12} = -D_{12}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 5 = -5$$

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3}D_{13} = D_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}D_{21} = -D_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2}D_{22} = D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

Método da Matriz Adjunta

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} D_{23} = -D_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2+1) = -3$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} D_{31} = D_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 9 = 4$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} D_{32} = -D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} D_{33} = D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

Operações com Matrizes

A matriz dos cofares:

$$A^c = \begin{bmatrix} -11 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & -10 & -6 \end{bmatrix}$$

A matriz adjunta é a matriz transposta dos cofatores

$$Adj(A) = A^{ct} = \begin{bmatrix} -11 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

A matriz inversa

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -11 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$